Mathématiques en technologies de l’information

Chapitre 2
Suites & Séries

Corps commutatif

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est appelé un ***corps commutatif***, avec les propriétés suivantes pour l'addition :

- Associativité
$$(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$
- Commutativité
$$x+y = y+x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
- Il existe un élément neutre $\mathbf{0}$ tel que
$$x+0 = 0+x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$
- Tout élément x admet un opposé $-x$
$$x+(-x) = -x+x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Corps commutatif

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est appelé un ***corps commutatif***, avec les propriétés suivantes pour la multiplication :

- Associativité
  $$(x \times y) \times z = x \times (y \times z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$
- Commutativité
  $$x \times y = y \times x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
- Il existe un élément neutre 1 tel que
  $$x \times 1 = 1 \times x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$
- Tout élément x admet un inverse $1/x$
  $$x \times (1/x) = 1/x \times x = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Corps commutatif

De plus, la multiplication est ***distributive*** par rapport à l'addition :

$$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Les inégalités

L'opérateur inégalité $\leq$ est l'opérateur de comparaison de deux éléments. Pour toute paire $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \leq y$$

Et signifie que l'élément x est inférieur ou égal à l'élément y ou, de façon équivalente, que y est plus grand ou égal à x.

L'opérateur d'inégalité

L'opérateur inégalité $\leq$ possède les propriétés suivantes :

- Totalité: toute paire $x, y \in \mathbb{R}$ est comparable, donc soit $x \leq y$ ou $y \leq x$
- Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}$
  $x \leq x$
- Antisymétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}$
  $x \leq y$ ET $y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y$
- Transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
  $x \leq y$ ET $y \leq z \Rightarrow \quad x \leq z$

L'opérateur d'inégalité

L'opérateur inégalité $\leq$ possède les propriétés suivantes :

- Compatibilité avec l'addition: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
  $$x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z$$

- Compatibilité avec la multiplication: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
  $$x \leq y \text{ ET } 0 \leq z \quad \Rightarrow \quad x \times z \leq y \times z$$

Corps totalement ordonné

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est appelé un ***corps totalement ordonné***.

Opérateurs découlant

- $\neq$ est l'opposé de l'opérateur d'égalité $=$
- $<$ est l'opérateur «strictement plus petit que» (ou, de manière équivalente, «strictement plus grand que»)

$$x < y \quad \Rightarrow \quad x \leq y \text{ ET } x \neq y \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- Les opérateurs «inverses» $\geq$ et $>$:

$$x \geq y \quad \Rightarrow \quad y \leq x \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$x > y \quad \Rightarrow \quad y < x \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Conséquences

- $\mathbb{R}$ peut être décomposé en deux sous-ensembles

$$\mathbb{R}^{+} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$$
$$\mathbb{R}^{-} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$
$$NOTE \quad \mathbb{R}^{*} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\ x \leq y \Leftrightarrow \quad x - y \leq 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\ x \leq y \Rightarrow \quad -x \geq -y$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \qquad z \leq 0 \text{ ET } x \leq y \ \Rightarrow \ x \times z \leq y \times z$
- $\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \text{ et } x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 < x \leq y \ \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

Valeur absolue

- La valeur absolue est une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$$

Propriétés:

- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow \; x = 0$
- $|x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x \times y| = |x| \times |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\big||x| - |y|\big| \leq \; |x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Intervalles de $\mathbb{R}$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

1. $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$,
2. $]a, b[= (a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$,
3. $]a, b] = (a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$,
4. $[a, b[= [a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$,
5. $[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}$,
6. $(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$,
7. $(-\infty, a] = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$,
8. $(-\infty, a) = \{ x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$,
9. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Propriétés

Si $a = b \in \mathbb{R}$, alors

- $[a, b] = \{a\}$,
- $(a, b) = \emptyset$,
- Tout intervalle non-nul $I \subset \mathbb{R}$ correspond à exactement l'une des intervalles 1 à 9,
- Pour tout $x, y \in I \subset \mathbb{R}$, l'intervalle $[\mathrm{x}, y] \subset I$,

Majorants & Minorants

Si E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors

- M est un ***majorant*** de E si
$$x \leq M \ \forall x \in E \iff E \subset (-\infty, M)$$

- m est un ***minorant*** de E si
$$x \geq m \ \forall x \in E \iff E \subset (m, +\infty)$$

- E est dit ***majoré*** s'il admet un majorant, ***minoré*** s'il admet un minorant et ***borné*** s'il admet un majorant et un minorant,

- Si le majorant $M \in E$, alors on notera $M = \max(E)$,

- Si le minorant $m \in E$, alors on notera $m = \min(E)$.

Extension aux fonctions

Soit $f\,:S\to\mathbb{R}$, avec S un ensemble quelconque

- L'addition de fonctions est défini par
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \forall x\in S,$$

- La multiplication de fonctions est défini par
$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x), \forall x\in S,$$

- Les opérateurs d'inégalités, de majorants et minorants s'appliquent également aux fonctions.

Exemple:
$$f\leq g \;\Rightarrow f(x)\leq\; g(x), \forall x\in S.$$

Exercices

Trouvez, s'ils existent, les minorants et majorants des fonctions suivantes pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{1}{\mathrm{x}^2+1}$

Principe d'Archimède

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{x} < \mathrm{n}$.

Conséquences du Principe d’Archimède

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \ < x < k + 1$,

- Cet entier est appelé la «partie entière» de x, souvent notée $\lfloor x \rfloor$.

Exercices

Trouvez la partie entière des réels suivants :

- $\sqrt{2} = 1.4142 \ldots$
- -$\sqrt{2}$

Suites

Une suite n'est rien d'autre qu'une fonction $f\,:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$, souvent écrits par $n\in\ \mathbb{N}\rightarrow u_n\in\mathbb{R}$.

En tant que tel, les notions de majorants, minorants et bornés s'appliquent donc aux suites.

Notion de récurrence

Soit $E \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble d'entiers, alors si

- $0 \in E$ et
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \in E \Rightarrow n+1 \in E$

Alors $E = \mathbb{N}$.

Ceci implique que montrer qu'une propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ revient à montrer que $\mathrm{P}(0)$ est vraie et que si $\mathrm{P}(n)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie aussi.

Exemple de récurrence

Prouvez que la formule suivante est vraite pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve

Pour prouver que c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence, il nous suffit de prouver que c'est vrai pour $n = 0$ et déduire que si c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, c'es vrai également pour $n + 1$.

1. Si $n = 0$, alors

Preuve - cas $n = 0$ et $n = 1$

Si $n = 0$, alors la formule est vraie, car

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve - récursion

Soit la formule vraie pour $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i = n + 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{2n + 2 + n^2 + n}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

CQFD

Suites

- Une suite est dite ***constante*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 = u_n$,
- Une suite est dite ***stationnaire*** s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}, u_0 = u_n, \forall\, n \geq n_0$,
- Une suite est dite ***périodique*** s'il existe une période $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = u_{n+N}$,
- Une suite est dite ***convergente*** s'il existe une période $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq l, \forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - l| < \epsilon$,
- Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.

Exercices de récurrence

- Prouver par récurrence que

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Soit u_n avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < \ u_n \leq 1$.

Exemple

- $u_n = \frac{(-1)^n}{1+n}$, les deux sous-suites générées par

$$\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \varphi_1(n) = 2n$$
$$=> v_1(n) = \frac{(-1)^{2n}}{1+2n} = \frac{1}{1+2n}$$

$$\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \varphi_2(n) = 2n + 1$$
$$=> v_2(n) = \frac{(-1)^{2n+1}}{1+(2n+1)} = \frac{-1}{2n+2}$$

Suites divergente

- Une suite est dite ***divergente*** si $\forall\ M \in \mathbb{R}$,
  $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n| > \mathrm{M},$

Limite d'une suite

- Une suite convergente u_n a pour limite $l \in \mathbb{R}$, si la suite
  $v_n = u_n - l$ tend vers 0.

- Si une suite est convergente, alors sa l limite est unique,

- La limite de la suite s'écrit aussi
  $$l = \lim_{n \to \infty} (u_n)$$

Propriétés de la limite

- Soient u_n et v_n deux suites, tendant respectivement vers l et l', alors

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to\infty}(\lambda u_n) = \lambda l$,
2. $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = l + l'$,
3. $\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = l \cdot l'$,
4. si pour tout $n \geq n_0, u_n \neq 0$ alors $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{u_n}) = \frac{1}{l}$.

Sous-Suites

- Pour toute suite u_n, on appelle ***sous-suite*** $v_n = u_{\varphi(n)}$

pour $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
une fonction strictement croissante $\varphi(n) < \varphi(n+1)$.

- Si u_n converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, alors toute sous-suite de u_n converge également vers l.

Exercice

- Prouvez que la suite $u_n = \frac{1}{1+n}$ converge vers 0,

- Soit u_n et v_n deux suites, prouvez que si

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } |u_n| \geq |v_{n_0}|,$$

alors si u_n converge vers 0, alors v_n converge vers 0.

Exercices

- Existe-t-il une suite u_n non-majorée qui n'admet pas comme limite $\lim_{n \to \infty}(u_n) = +\infty$?

- Montrez que si une suite (u_n) tend vers $+\infty$, alors la suite est minorée.

- Montrez que si une suite (u_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0 (pour tout $n \geq n_0$ tel que $u_n > 0$).

Exercices - solutions

- Oui, par exemple $u_n = n\,sin(n)$.

- Par définition de $\lim_{n\to\infty}(u_n) = +\infty$, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe N tel que $u_n > M$ pour tout $n \geq N$, c'est donc également vrai pour $M = 1$. Donc pour tout $n < N$, $u_n \geq \min(u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ et pour tout $n \geq N$, $u_n > 1$, donc $u_n \geq \min(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, 1)$, pour tout $n \geq 0$. CQFD.

- Soit N tel que $u_n > \frac{1}{\epsilon}$ (qui existe par définition de la limite pour tout $0 < \epsilon \leq 1$). Donc pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{\mathrm{u_n}} \leq \epsilon$, qui est la condition de convergence vers 0. CQFD

Suites arithmétiques

Une suite est dite ***arithmétique*** si

$$u_n = an + b \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

a est appelé la ***raison*** de la suite, et b est le ***terme initial***.

En effet, pour $n = 0$, $u_0 = b$.

Suites arithmétiques - Propriétés

- Une suite arithmétique est de raison a si et seulement si $u_{n+1} = u_n + a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Preuve

$\Longrightarrow$: si u_n est arithmétique de raison a donc $u_n = an + b$, pour un $b \in \mathbb{R}$. Donc, $u_{n+1} = a(n+1) + b = a + an + b = a + u_n$.

$\Longleftarrow$: si $u_{n+1} = u_n + a$, alors $u_{n+1} = u_{n-1} + 2a = \cdots = u_0 + (n+1)a$, avec $u_0 \in \mathbb{R}$, qui est la définition d'une suite arithmétique (avec $b = u_0 \in \mathbb{R}$). CQFD.

Suites géometriques

Une suite est dite ***géométrique*** si

$$u_n = cq^n \text{ avec } c, q \in \mathbb{R}.$$

q est appelé la ***raison*** de la suite, et c est le ***terme initial***.

En effet, pour $n = 0$, $u_0 = b$.

Exercice

Montrer qu'une suite est géométrique si et seulement si

$$u_{n+1} = qu_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Propriétés des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$, alors

- Si $q = 1, u_n = q^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, c'est une suite constante;
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to \infty} (q^n) = +\infty$;
- Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \to \infty} (q^n) = 0$;
- Si $q < -1$, alors $\lim_{n \to \infty} (q^n)$ n'est pas défini, la suite ne converge pas et n'es ni majorée ni minorée.

Suites des puissances

Une suite est dite ***suite des puissance*** p-èmes si

$u_n = n^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

Propriétés des suites des puissances

Soit $p \in \mathbb{Z}$, alors

- Si $p = 0$, $u_n = n^0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, c'est une suite constante;
- Si $p > 0$, alors $\lim_{n\to\infty}(n^p) = +\infty$;
- Si $p < 0$, alors $\lim_{n\to\infty}(n^p) = 0$.

Séries numériques

Une série

$$S(u)_N = \sum_{i=1}^{N} u_n$$

correspond à faire la somme des termes d'une suite u_n.

Exemple

Soit$u_n = cq^n$une suite géométrique, alors la série induite

$$S(u)_N = \sum_{i=1}^{N} u_n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

converge pour $N \to +\infty$ si $|q|$<1.

On en déduit la formule générale

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, |q|<1$$

Propriétés

Soit $S(u)_N = \sum_{i=1}^{N} u_n$ une série définie par la série u_n, alors une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que la série $S(u)_N$ converge est que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

ATTENTION: le fait qu'une suite converge vers 0 ne suffit pas pour dire que la série induite par la somme converge !

Fonction dérivable

Une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est dite ***dérivable*** en $x_0 \in I$ si la limite suivante existe :

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Cette limite est alors appelée la dérivée de f en x_0, est se note $f'(x_0)$.

Si f est dérivable pour tout $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable sur I et la fonction dérivée se note $f': I \to \mathbb{R}$.

Développement de McLaurin

Une fonction indéfiniment dérivable $f: I \to \mathbb{R}$. Alors on peut approximer la valeur de la fonction via son ***développement de McLaurin***:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ \ldots$$

Suite de Taylor

La suite de Taylor est une généralisation du développement de McLaurin en un point $a \in I$ quelconque (pas uniquement 0) est définie par

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{i}(a)(x-a)^{i}}{i!}$$

où f^{i} est la $i^{\text{ème}}$ dérivée de la fonction f.

Exemple

Développement de Taylor de la fonction $f(x) = e^x$ au point $a = 0$ (c'est donc le développement de McLaurin).

- $f'(x) = e^x$
- $e^0 = 1$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Cas particulier

$$e = f(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

Exercices

- Ecrivez le développement de McLaurin pour la fonction $f(x) = \cos(x)$,

- Ecrivez le développement de Taylor pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ en $a = \pi/2$.

Nombre décimaux

- Un nombre décimal est un nombre s'écrivant sous la forme

$$y = 10^{-c}a = \frac{a}{10^c}, \qquad a \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{N}$$

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exercice

Les nombres suivants sont-ils décimaux ?

- 1024
- $\frac{1}{1024}$
- $\frac{\pi}{10^{200}}$
- $\frac{1}{3}$

Exercice

Les nombres suivants sont-ils décimaux ?

- 1024
- $\frac{1}{1024}$
- $\frac{\pi}{10^{200}}$
- $\frac{1}{3}$

Approximation d'un décimal

Soit $x \in \mathbb{D}$ un nombre décimal

- Soit la suite $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- Et la suite $a_n = \lfloor 10^n (x - x_{n-1}) \rfloor$
- Soit la série $x_N = \sum_{n=0}^{N} x_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$

Alors

$$\lim_{N \to \infty} x_N = 0, a_1 a_2 \ldots = x$$

Résolution d'équation

Soit $f\colon J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle J

- Le but est de trouver une solution à l'équation

$$f(x) = 0$$

- Existe-t-il toujours une solution à ce problème ?

- Note: si on sait résoudre $f(x) = 0$, alors sait-on résoudre $f(x) = \alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$?

Notions fondamentales

Pour appliquer la méthode d'approche, il faut localiser un intervalle $I = [a, b] \subseteq J$ tel que :

- Il existe un seul et unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.

Propriété :

Si f est continue sur $I = [a, b] \subseteq J$ et que $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, alors il existe $x \in I$ tel que $f(x) = 0$.

Méthode de Newton

Soit $f\colon J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle J et $I = [a, b] \subseteq J$ un intervalle sur lequel la fonction est continue et tel qu'il existe $x \in [a, b] | f(x) = 0$.

Définissons la suite u_n de manière suivante

- Choisir $u_0 \in [a, b]$,
- $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Si toutes ces conditions sont réunies, la suite u_n est une approximation de la solution à l'équation $f(x) = 0$.

Méthode de Newton - Interprétation

A chaque itération u_n, la méthode cherche l'intersection de la tangente à $f(u_n)$ avec l'axe $x = 0$.

La tangente d'une fonction dérivable à un point u_n est la fonction

$$\tau(x) = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$$

Méthode de Newton - Interprétation

Le point u_{n+1} est donc la solution à l'équation

$$f'(u_n)(u_{n+1} - u_n) + f(u_n) = 0$$

Avec un peu de remaniement, on obtient

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Méthode de Newton - Conditions

Pour que l méthode de Newton fonctionne, il faut un certain nombre de conditions, à savoir

- $f(x)$ est continue et dérivable sur $[a, b]$,
- $f'(x) \neq 0, \forall\, x \in [a, b]$,
- L'image de la fonction $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est dans I (pour assurer la condition de dérivabilité)

Méthode de Newton - Exemple

- Soit $f(x) = \mathrm{x}^2 \; - 2$ (continue et dérivable sur $[1, 3]$,
- $f(0) \cdot f(3) = -2 \cdot 7 \leq 0$, donc il existe $x \in [1,3]$ tel que $f(x) = 0$,
- $f'(x) = 2x \neq 0$, $\forall\, x \in [1, 3]$,
- Choisissons $u_0 = 2 \in [1, 3]$.
- Toutes les conditions sont donc réunies, et nous pouvons appliquer la méthode de Newton !

Méthode de Newton – Exemple (suite)

- $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \frac{(u_n)^2-2}{2 \cdot u_n} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$
- $u_0 = 2$,
- $u_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$,
- $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1.41666$
- $u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408} = 1.414215 \ldots$